Oversigt

over

det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger

og

dets Medlemmers Arbeider

fra 31 Mai 1836 til 31 December 1837.

Af

Etatsraad og Professor *H. C. Örsted.*

Commandeur af Dannebrogen og Dannebrogsmand, Selskabets Secretair.

Nærværende Oversigt omfatter et længere Tidsrum end sædvanligt, fordi Selskabet har fundet det tjenligt, at saavel Beretningen om dets Arbeider, som Bekjendtgjörelserne angaaende dets Priisopgaver skee ved Nytaarstid.

Selskabet har i det Tidslöb, som her omhandles, tabt et fortjent Medlem i Hr. *Hans Christian Lyngbye*, Sognepræst for Söeborg og Gilleleie Menigheder.

Til indenlandske Medlemmer ere optagne Proprietair *Hofman Bang* til Hofmansgave og Professor *Eschricht*.

Til udenlandske Medlemmer ere optagne *Charles Lyell*, Medlem af det Kgl. Videnskabs Selskab i London og Dr. *Bartholomæus Kopitar* ved det Keiserlige Bibliothek i Wien.

Den mathematiske Classe.

Professor *Ramus* har forelagt Selskabet en Afhandling om de periodiske Kjædebröker, hvoraf Följende er et Uddrag.

Betegnes Leddene i en Kjædebrök af sædvanlig Form ved $a_0, a_1, a_2, \ldots$, som ere positive hele og a_0 nærmest lavere end Kjædebrökens Værdie x, hvilket kort kan skrives saaledes:

$$x = a_0, a_1, a_2, \ldots$$

saa vil denne Kjædebrök blive periodisk, hvis almindeligen $a_{n+\mu t+\theta} = a_{n+\theta}$ og kan da skrives saaledes:

$$x = a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \, (a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots a_{n+t})$$

(ifölge en Betegnelse af *le Besgue* s. bulletin des sciences mathem. 1831 mars), og en fuldkommen periodisk vil være saaledes fremstillet:

$$u = (a_0, a_1, a_2, \ldots a_{t-1}).$$

Betegnes den principale Convergent til u af Index r ved $\frac{y^r}{z_r}$ saaledes at $\frac{y_0}{z_0} = \frac{a_0}{1}$, saa er u bestemt ved Ligningen

$$z_{t-1}\, u^2 - (y_{t-1} - z_{t-2})\, u - y_{t-2} = 0. \qquad (1)$$

Sættes dernæst

$$u^1 = (a_{t-1}, a_{t-2}, a_{t-3} \ldots a_0),$$

saa maa u^1 fremkomme af u ved at forandre $\frac{y_{t-1}}{z_{t-1}}$ og $\frac{y_{t-2}}{z_{t-2}}$ til $\frac{y_{t-1}}{y_{t-2}}$ og $\frac{z_{t-1}}{z_{t-2}}$, altsaa vil u^1 være bestemt ved Ligningen

$$y_{t-2}\, {u^1}^2 - (y_{t-1} - z_{t-2})\, u^1 - z_{t-1} = 0$$

som sammenlignet med (1) giver

$$u^1 = \frac{z_{t-1}}{y_{t-2}}\, u \qquad (2)$$

hvoraf sees, at Forholdet $\frac{u^1}{u}$ er rationalt.

Betingelsen for at (1) kan være en reen Ligning er $y_{t-1} = z_{t-2}$, hvoraf fölger at $a_0 = 0$ og at Rækken $a_1, a_2, \ldots a_{t-1}$ er symmetrisk. Heraf udledes fölgende Formel til at bestemme en séregen Classe af periodiske Kjædebröker:

$$\left.\begin{array}{l} a_0\,(a_1, a_2, a_3, \ldots a_3, a_2, a_1, 2a_0) = \sqrt{\dfrac{p}{q^0}} \\[2ex] \dfrac{p}{q} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_3, a_2, a_1, a_0 \\[2ex] \dfrac{p^0}{q^0} = a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots a_3, a_2, a_1, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

og ifölge $p\,q^0 - p^0\,q = \pm 1$ og $q = p^0$, ved at sætte $\frac{p}{q^0} = C$, erholdes ligefrem

$$p^{0^2} - q^{0^2} C = \mp 1, \qquad (4)$$

hvoraf Anvendelse gjöres i den ubestemte Analyse.

Den almindelige Kjædebrök x er i sin Værdie bestemt ved en qvadratisk Ligning; nemlig, naar x_{n+1} betegner dens complete Qvotient af Index $n+1$ d. e.:

$$x_{n+1} = (a_{n+1}, a_{n+2} \cdots a_{n+t})$$

saa er ifölge (1)

$$\beta x_{n+1}^2 - (\alpha - \beta^0) x_{n+1} - \alpha^0 = 0$$

idet

$$\frac{\alpha}{\beta} = a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots a_{n+t}$$

$$\frac{\alpha^0}{\beta^0} = a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots a_{n+t-1};$$

altsaa ifölge den bekjendte Relation mellem x_{n+1}, og x, faaes

$$\beta (z_{n-1} x - y_{n-1})^2 - (\alpha - \beta^0)(z_{n-1} x - y_{n-1})(y_n - z_n x)$$
$$- \alpha^0 (y_n - z_n x)^2 = 0 \qquad (5).$$

Om denne Ligning lader det sig directe bevise, at den ikke kan blive reen qvadratisk uden netop derved, at den reduceres til det af (1) udledte Tilfælde fremstillet i (3). Betingelsen kan nemlig saaledes skrives:

$$\left.\begin{array}{l} y_n z_n \beta^0 \left(\dfrac{\alpha^0}{\beta^0} + \dfrac{z_{n-1}}{z_n}\right) - y_{n-1} z_n \beta \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{z_{n-1}}{z_n}\right) \\ + y_n z_n \beta^0 \left(\dfrac{\alpha^0}{\beta^0} + \dfrac{y_{n-1}}{y_n}\right) - y_n z_{n-1} \beta \left(\dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{y_{n-1}}{y_n}\right) \end{array}\right\} = 0$$

eller, ved for t at sætte μt d. e. ved at samle flere Perioder i een, hvorved x_{n+1} ikke forandres, og ved dernæst at gjöre μ uendelig, hvorved $\frac{\alpha}{\beta}$ og $\frac{\alpha^0}{\beta^0}$ bringes til at falde sammen med x_{n+1},

$$\left.\begin{array}{l} z_n y_{n-1} \beta^0 \left(x_{n+1} + \dfrac{z_{n-1}}{z_n}\right)\left(\dfrac{y_n}{y_{n-1}} - \dfrac{\beta}{\beta^0}\right) \\ + y_n z_{n-1} \beta^0 \left(x_{n+1} + \dfrac{y_{n-1}}{y_n}\right)\left(\dfrac{z_n}{z_{n-1}} - \dfrac{\beta}{\beta^0}\right) \end{array}\right\} = 0$$

Heraf fölger, at $\frac{\beta}{\beta^0}$ maa ligge mellem $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ og $\frac{z_n}{z_{n-1}}$, men ifölge Theorien af de omvendte Kjædebröker er

$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \dots\ a_0$$

$$\frac{z_n}{z_{n-1}} = a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2},\ \dots\ a_1$$

$$\frac{\beta}{\beta^0} = a_{n+t},\ a_{n+t-1}\ a_{n+t-2},\ \dots$$

altsaa maae fölgende Ligheder finde Sted:

$$a_{n+t} = a_n,\ a_{n+t-1} = a_{n-1},\ a_{n+t-2} = a_{n-2},\ \dots$$

saa at den forelagte Kjædebröks Periode maa begynde med a_1. Fölgelig maa x være af Formen $a + \frac{1}{u}$, idet a er positiv heel og u bestemt som ovenfor, altsaa $u = \frac{1}{x-a}$, som indsat i (1) giver

$$z_{t-1} - (y_{t-1} - z_{t-2})\ (x-a) - y_{t-2}\ (x-a)^2 = 0$$

idet $\frac{y_r}{z_r}$ betegner den almindelige Convergent til u. For at denne Ligning kunde blive reen qvadratisk, maatte $2a + \frac{z_{t-2}}{y_{t-2}} = \frac{y_{t-1}}{y_{t-1}}$ d. e.

$$2a,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \dots\ a_{t-2} = a_{t-1},\ a_{t-2},\ a_{t-3},\ \dots\ a_0.$$

Heraf vilde fölge $a_{t-1} = 2a$, $a_{t-2} = a_0$, $a_{t-3} = a_1$, ... som netop er det i (3) fremstilte Tilfælde.

Er den qvadratiske Ligning forelagt med hele Coefficienter

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

saa vil dens Rödder

$$x = \frac{-B + \sqrt{E}}{2A},\quad x^1 = \frac{-B - \sqrt{E}}{2A},$$

idet $E = B^2 - 4AC$, udvikles i Kjædebrök ifölge de bekjendte Formler af *Lagrange*, grundede paa Relationen mellem x_r og x, nemlig

$$x_r = \frac{A\,(z_{r-2}\,x - y_{r-2})\ (y_{r-1} - z_{r-1}\,x^1)}{A\,(y_{r-1} - z_{r-1}\,x)\ (y_{r-1} - z_{r-1}\,x^1)} = \frac{-Q_r + (-1)^r\,\frac{1}{2}\sqrt{E}}{P_r}, \tag{6}$$

hvorved Udtrykkene erholdes for P_r og Q_r, som give

$$\left.\begin{aligned} Q_r = a_{r-1}\,P_{r-1} + Q_{r-1},\ P_r = a_{r-1}\,(Q_r + Q_{r-1}) + P_{r-2}, \\ Q_r^2 - P_r\,P_{r-1} = \tfrac{1}{4}E, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

idet $P_{-1} = C$, $P_0 = A$, $Q_0 = \frac{1}{2}B$; og ved i den qvadratiske Ligning for x_{n+1} at indsætte denne Störrelses Udtryk formedelst P_{n+1} og Q_{n+1}, erholdes

$$\alpha^0 = -\frac{\beta P_n}{P_{n+1}}, \qquad \alpha - \beta^0 = \frac{2\alpha^0 Q_{n+1}}{P_n}.$$

Heraf udledes alle de bekjendte Egenskaber ved den periodiske Kjædebrök udviklet af den forelagte qvadratiske Ligning, hvilke Egenskaber Forfatteren fremdeles har suppleret ved dette efterfölgende Theorem:

Naar en Deel af Perioden, almindeligen fremstillet ved

$$a_{n+\theta+1}\cdot\ a_{n+\theta+2},\ \ldots\ a_{n+\theta+k}$$

er symmetrisk, saa ville ogsaa Rækkerne

$$Q_{n+\theta+1},\ Q_{n+\theta+2},\ \ldots\ Q_{n+\theta+k+1}$$

$$P_{n+\theta},\ P_{n+\theta+1},\ P_{n+\theta+2},\ \ldots\ P_{n+\theta+k+1}$$

med Abstraction fra de stedse afvexlende Fortegn, være symmetriske, hvis

$$\left.\begin{aligned} Q_{n+\theta+k+1} &= (-1)^k\, Q_{n+\theta+1} \\ P_{n+\theta+k+1} &= (-1)^{k+1}\, P_{n+\theta} \end{aligned}\right\}$$

Dette finder f. Ex. Anvendelse, naar den forelagte Ligning er reen qvadratisk eller $B=0$; thi da Kjædebröken er periodisk, maa den ifölge det foran fundne have Formen (3), dens Værdie antaget >1, altsaa $n=0$, $\theta=0$, $k=t-1$, og at begge de angivne Betingelser ere opfyldte bevises saaledes. Ifölge (4) ved for C at sætte $-\frac{C}{A}$ og for p^0 og q^0 at sætte y_{t-1} og z_{t-1}, haves

$$Ay^2_{t-1} + Cz^2_{t-1} = (-1)^t A,$$

som sammenlignet med det Udtryk for P_t, som haves ifölge (6), giver $P_t = (-1)^t A$; tilmed er $P_0 = A$, altsaa er den anden Betingelse opfyldt. Sættes nu i (6) $r=t$, haves $x_t = \frac{Q_t}{(-1)^{t-1}A} + \sqrt{-\frac{C}{A}}$, men ifölge (3) $a_t = 2\,a_0$ idet a_0 nærmest $< \sqrt{-\frac{C}{A}}$, altsaa $Q_t = (-1)^{t-1} A\, a_0$. Ifölge (7) er $Q_1 = a_0 P_0 + Q_0 = a_0 A$, idet $Q_0 = \frac{1}{2}B = 0$; fölgelig $Q_t = (-1)^{t-1} Q_1$. Altsaa er ogsaa den förste Betingelse opfyldt.

Dette kan tjene til at udfylde den Lacune, som findes i Théorie des nombres T. I Pag. 59, hvor det med Hensyn til Oplösningen i hele Tal af den ubestemte Ligning $p^2 - Aq^2 = \pm D$, som haves derved at p og q ere Tæller eg Nævner i en convergerende Brök af Index r til $\sqrt{A}$ idet $P_r = \pm D$, siges: "Il peut se trouver plusieurs fois le même nombre D dans la même "periode, et il se rencontrera toujours au moins deux fois, puisque la période "est symétrique (excepté lorsque le quotient auquel répond $\frac{p}{q}$ est le terme "moyen de la période, abstraction faite de son dernier terme $2a$)," men da *Legendre* alene har beviist Symmetrien af Kjædebrökens Periode, med Udelukkelse af det sidste Led $2a$, savnedes der Beviis for Symmetrien af Perioden $P_0, P_1, P_2, \ldots P_t$, som er den, det her kommer an paa, og som er symmetrisk i sin hele Udstrækning.

Den physiske Classe.

Professor *Jacobson*, Ridder og Dannebrogsmand, har i Selskabet fremviist Pröver af smukt grönfarvet Glas fra Holmegaardsfabriken. Det skyldte vel sin grönne Farve til Chromforiltet; men man havde ikke faaet heldige Resultater, ved at anvende dette Ilte umiddelbart. Professoren havde derfor foreslaaet at bruge surt chromsurt Kali, som naturligviis adskilles under Glassets Dannelse. Dette gav en god og eensformigt udbredt grön Farve.

Professor *Reinhardt* Ridder og Dannebrogsmand foreviste en Slange-Art, som det Kongelige naturhistoriske Museum havde i Aaret 1834 erholdt tilligemed nogle andre sjeldne Slanger directe fra Java; tillige fremlagdes nogle Tegninger af den. Han ansaae denne Slangeart for at være hidindtil ubeskrevet, og oplyste ved nogle Sammenligninger, at den ikke uden Tvang kan henföres til nogen af de hidindtil opstillede den nærmest staaende Slægter; den synes derfor at burde udgjöre en egen Slægt, som har faaet Navn af *Xenodermus*, hvis eneste Art kunde kaldes *javanicus*.

Det er især den besynderlige Form af Hudens Skjæl paa Kroppens Overdeel, som giver den et fra de övrige Slanger forskjelligt Udseende. Hos disse er Huden i denne Region belagt med eet Slags Skiæl, og kun hos meget faa Arter med to Slags, som dog kun ere lidt forskiellige. Denne Slangeart derimod har tre Slags. Det förste dannes af tre langs Ryggen löbende Rader af store, ovale, stærkt ophöiede og efter Længden noget kiölformigt sammentrykte Skiæl. Hver Rad begynder paa kort Afstand fra Nakken, og löber ned til Spidsen af Halen. Imellem Raderne er en Afstand tre Gange saa bred som Skiællenes Tværdiameter. Hver Siderad dannes af enkelte paa hinanden